

هندسه ۱

فصل ۳


پندضلعی ها

مدرس: سیدابوذر حسینی



* از «خم ساده» تا «چندضلعی»

در این قسمت، یک سری تعاریف برای رسیدن به تعریف چندضلعی ارائه می‌دهیم:




خم مسطح: مجموعه‌ای از نقاط است که بتوانیم آن را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کنیم.

مثال: خم‌های  و  مسطح‌اند، ولی خم  مسطح نیست.

خم ساده: خم مسطحی است که خودش را قطع نمی‌کند، مگر در حالتی که نقاط انتهایی به هم می‌رسند.

مثال: خم‌های  و  ساده‌اند ولی خم  ساده نیست.

خم بسته: اگر نقاط انتهایی یک خم بر هم منطبق باشند، آن خم، بسته نامیده می‌شود. خم بسته می‌تواند ساده باشد یا نباشد.

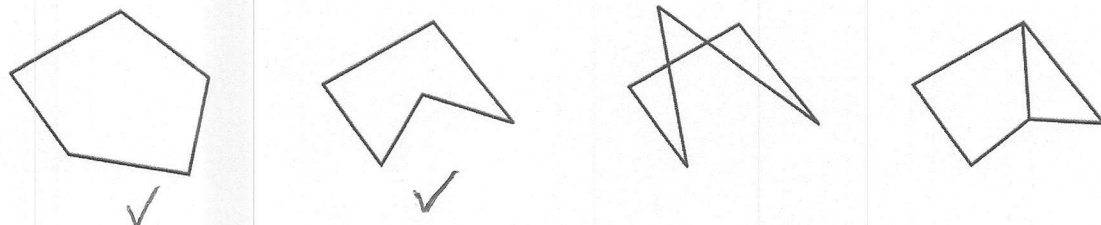
مثال: خم  ساده‌ی بسته است. خم  ساده است ولی بسته نیست. خم  بسته است ولی ساده نیست.

تعریف: چندضلعی، شکلی است که از اجتماع حداقل سه پاره‌خط تشکیل شده باشد، به طوری که:

(۱) هر پاره‌خط، دقیقاً دو پاره‌خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.

(۲) هر دو پاره‌خط متوالی که در یک انتها مشترک‌اند، روی یک خط نباشند.

مثال: کدام یک از شکل‌های زیر چندضلعی است؟

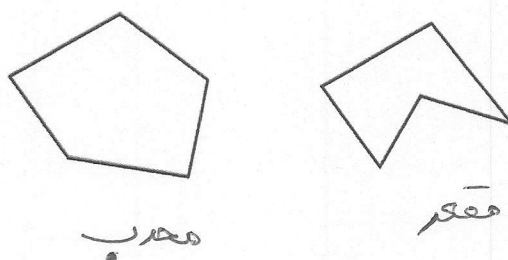


تعریف: چندضلعی را محدب گوئیم هرگاه با در نظر گرفتن خط شامل هر ضلع آن، بقیه نقاط چندضلعی در یک طرف آن

خط واقع شوند. (به بیان ساده‌تر، زاویه‌ی بزرگ‌تر از 180° در چندضلعی وجود نداشته باشد).

- هر چندضلعی را که محدب نباشد، مقعر می‌نامند.

مثال: کدام یک از چندضلعی‌های زیر محدب و کدام یک مقعر است؟



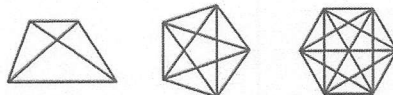


* قطر در چندضلعی‌ها

تعریف: در هر n ضلعی، هر پاره‌خط را که دو انتهای آن، دو رأس غیرمجاور باشند، قطر می‌نامیم.

از هر رأس یک n ضلعی محدب، قطر می‌توان رسم کرد (خود رأس و دو رأس کناری آن که با ضلع به هم متصل‌اند،

کم می‌شوند). لذا تعداد کل قطرهای هر n ضلعی محدب از رابطه‌ی $\frac{n(n-3)}{2}$ محاسبه می‌شود.



نکته: اگر به تعداد اضلاع یک n ضلعی محدب، یک ضلع اضافه شود، به تعداد اقطار، $(n-1)$ قطر اضافه می‌شود.

یادآوری:

- مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب برابر $(n-2) \times 180^\circ$ و مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی محدب برابر 360° است.

- اگر n ضلعی، منتظم باشد، هر زاویه‌ی داخلی برابر $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$ درجه و هر زاویه‌ی خارجی برابر $\frac{360^\circ}{n}$ درجه است.

✓ تست: تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب، سه برابر تعداد اضلاع آن است. تعداد اضلاع کدام است؟

$$\frac{n(n-3)}{2} = 3n \rightarrow \frac{n-3}{2} = 3 \rightarrow n-3=6 \rightarrow n=9$$

۱۰ (۱) ۱۲ (۲)

۷ (۳) ۹ (۴) ✓

✓ تست: اگر مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی محدب برابر 1080° باشد، از هر رأس آن چند قطر قابل رسم است؟

$$(n-2) \times 180 = 1080 \rightarrow n-2 = \frac{1080}{180} = 6 \rightarrow n=8$$

۶ (۱) ۷ (۲)

۸ (۳) ۵ (۴) ✓

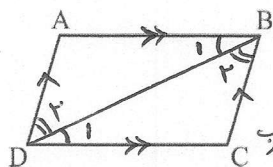
از هر رأس $n-3$ قطر یعنی $8-3=5$ قطر می‌گذرد



* چهارضلعی ها

۱- متوازی الاضلاع

تعریف: متوازی الاضلاع چهارضلعی است که اضلاع روبه روی آن دوبه دو موازی اند.

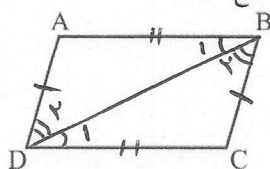


قضیه ۱: در هر متوازی الاضلاع، اضلاع روبه رو با هم برابرند. $\begin{cases} AB=DC \\ AD=BC \end{cases}$ پرهان: قطر BD را رسم می کنیم:

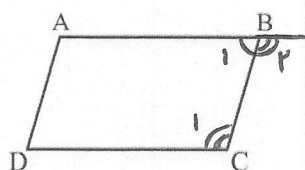
ف: $\begin{cases} AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{عکس خطوط موازی}} \begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ \angle 3 = \angle 4 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{قضیه ۱}} \triangle ABD \cong \triangle BDC$ $\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \begin{cases} AB=DC \\ AD=BC \end{cases}$

موازی عکس $\rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$
موازی عکس $\rightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2$

عکس قضیه ۱: اگر در یک چهارضلعی، اضلاع روبه رو با هم برابر باشند، آنگاه چهارضلعی، متوازی الاضلاع است.



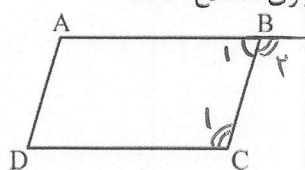
ف: $\begin{cases} AB=DC \\ AD=BC \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{قضیه ۱}} \triangle ABD \cong \triangle BDC$ $\xrightarrow{\text{عکس خطوط موازی}} \begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{قضیه ۱}} \begin{cases} AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{cases}$

قضیه ۲: در هر متوازی الاضلاع، زوایای مجاور مکمل اند. $\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{C} = \hat{C} + \hat{D} = \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ 

$AB \parallel CD$ و BC مورب $\rightarrow \hat{C} = \hat{B}_2$ $\rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ$
 $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ \rightarrow \hat{B}_2 = \hat{C}_1$

هابقی تساوی ها نیز به همین ترتیب ثابت می شوند.

عکس قضیه ۲: اگر در یک چهارضلعی، هر دو زاویه ی مجاور مکمل باشند، آنگاه چهارضلعی، متوازی الاضلاع است.

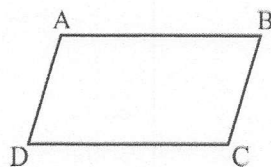


$\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ$ $\rightarrow \hat{B}_2 = \hat{C}_1$ $\xrightarrow{\text{قضیه ۱}} AB \parallel CD$
 $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$

به همین ترتیب ثابت می شود $AD \parallel BC$ ع: $\begin{cases} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{D} \end{cases}$

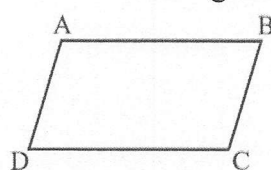
قضیه ۳: در هر متوازی الاضلاع، زوایای مقابل برابرند.

از هم نهشتی قضیه ۱ داریم:



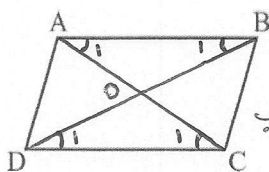
$\begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \end{cases} \xrightarrow{+} \hat{B} = \hat{D}$ $\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \hat{A} = \hat{C}$

عکس قضیه ۳: اگر در یک چهارضلعی، هر دو زاویه ی مقابل برابر باشند، آنگاه چهارضلعی، متوازی الاضلاع است.



$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \rightarrow 2\hat{B} + 2\hat{C} = 360^\circ$
 $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

$\rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ طبق عکس قضیه ۲ $\rightarrow ABCD$ متوازی الاضلاع

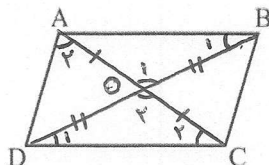


$$ح: \begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \end{cases}$$

قضیه ۴: در هر متوازی‌الاضلاع، قطرهای منصف یکدیگرند.

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{موازین}} \begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ AB = CD \end{cases} \xrightarrow{\text{(ض ز)}} \triangle AOB \cong \triangle COD \xrightarrow{\text{اجزاء متناظر}} \begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \end{cases} \\ & \text{" " } \xrightarrow{\text{موازین}} \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \end{cases} \end{aligned}$$

عکس قضیه ۴: اگر در یک چهارضلعی، قطرهای منصف یکدیگر باشند، آنگاه چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.

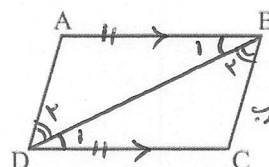


$$\begin{cases} OA = OC \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OB = OD \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{(ض ز)}} \triangle AOB \cong \triangle COD \xrightarrow{\text{اجزاء متناظر}} B_1 = D_1 \xrightarrow{\text{۲۲ع}} AB \parallel DC$$

$$\xrightarrow{\text{موازین}} \triangle AOD \cong \triangle BOC \rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \xrightarrow{\text{۲۲ع}} AD \parallel BC$$

مثال: ثابت کنید هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن موازی و مساوی باشد، متوازی‌الاضلاع است.

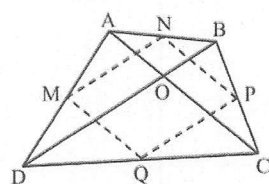


$$ف: AB \parallel CD \quad \text{موازی‌الاضلاع } ABCD \rightarrow AD \parallel BC \quad \text{ح: } AB = CD$$

$$\xrightarrow{\text{موازین}} \begin{cases} AB = CD \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \end{cases} \xrightarrow{\text{(ض ز)}} \triangle ABD \cong \triangle CDB \xrightarrow{\text{اجزاء متناظر}} \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \xrightarrow{\text{۲۲ع}}$$

$$\rightarrow AD \parallel BC \rightarrow \text{موازی‌الاضلاع } ABCD$$

مثال: (الف) ثابت کنید اگر وسط‌های اضلاع هر چهارضلعی محدب را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.



$$موازی‌الاضلاع: ح: AN = NB, BP = PC, CQ = QD, AM = MD$$

پرهان: قطرهای AC و BD را رسم می‌کنیم:

$$\triangle ABD: \frac{AN}{NB} = \frac{AM}{MD} = 1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BD \rightarrow MN \parallel PQ$$

$$\triangle BCD: \frac{BP}{PC} = \frac{BQ}{QD} = 1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BD$$

MNPQ

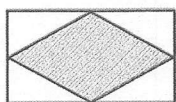
$$\triangle ABC: \frac{BN}{NA} = \frac{BP}{PC} = 1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} NP \parallel AC \rightarrow NP \parallel MQ$$

$$\triangle ADC: \frac{CQ}{QD} = \frac{CP}{PA} = 1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MQ \parallel AC$$

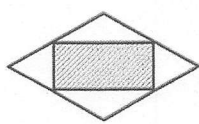
موازی‌الاضلاع

(ب) رابطه‌ای برای محیط متوازی‌الاضلاع به دست آورید.

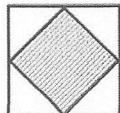
$$\begin{cases} MN = PQ = \frac{1}{2} BD \\ NP = MQ = \frac{1}{2} AC \end{cases} \rightarrow P_{MNPQ} = AC + BD$$



(پ) اگر شکل اولیه مستطیل یا دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین باشد، شکل حاصل چیست؟ لوزی - چون مستطیل دو قطر باهم برابرند، لذا هر چهارضلع متوازی‌الاضلاع حاصل باهم برابر می‌شوند.



(ت) اگر شکل اولیه لوزی باشد، شکل حاصل چیست؟ مستطیل - زاویه متوازی‌الاضلاع همان زاویه بین دو قطر است چون در لوزی دو قطر پرهم عمودند، لذا متوازی‌الاضلاع تبدیل به مستطیل می‌شود.

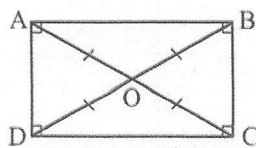


(ث) اگر شکل اولیه مربع باشد، شکل حاصل چیست؟ مربع - ترکیب دو حالت (پ) و (ت)





۲- مستطیل



تعریف: مستطیل، متوازی الاضلاعی است که یک زاویه ی 90° درجه دارد.

قضیه ۵: در هر مستطیل، دو قطر با هم برابر و منصف یکدیگرند.

قضیه ۶: متوازی الاضلاعی که دو قطر برابر دارد، مستطیل است. $ABCD$ مستطیل: C

$ABCD$ متوازی الاضلاع: F

$$\begin{cases} DC = DC \\ AD = BC \\ AC = BD \end{cases}$$

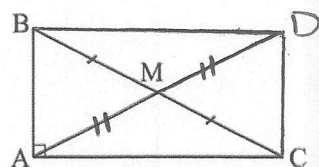
$$\xrightarrow{(ض. ض. ض.)} \triangle ADC \cong \triangle BDC \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \hat{D} = \hat{C} \xrightarrow{D+C=180^\circ} \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$$

$\leftarrow ABCD$ مستطیل

ویژگی های مهمی در مثلث قائم الزاویه

قضیه ۷: در هر مثلث قائم الزاویه، میانه ی وارد بر وتر، نصف وتر است.

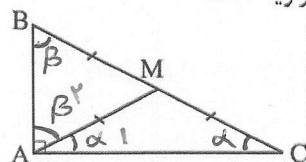
برهان: میانه AM را به اندازه خود تا D امتداد داده و از D به B وصل می کنیم:



$$\begin{cases} AM = DM \\ BM = CM \end{cases} \rightarrow \triangle BMC \cong \triangle DMA \xrightarrow{\text{متوازی الاضلاع}} \triangle BMC \cong \triangle DMA \xrightarrow{\hat{A} = 90^\circ} \triangle BMC \cong \triangle DMA$$

$$\rightarrow \underbrace{AD = BC}_{2AM} \Rightarrow 2AM = BC \rightarrow AM = \frac{BC}{2}$$

عکس قضیه ۷: اگر در مثلثی، میانه ی وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع باشد، آنگاه مثلث قائم الزاویه است.



$$\text{فرض کنیم: } \begin{cases} \hat{C} = \alpha \xrightarrow{MA=MC} \hat{A}_1 = \hat{C} = \alpha \\ \hat{B} = \beta \xrightarrow{MA=MB} \hat{A}_2 = \hat{B} = \beta \end{cases}$$

$$\triangle ABC: \underbrace{\hat{A}}_{\alpha+\beta} + \underbrace{\hat{B}}_{\beta} + \underbrace{\hat{C}}_{\alpha} = 180^\circ \rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

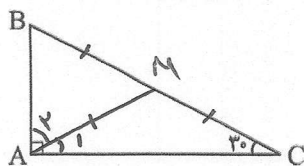
$$\rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\rightarrow \hat{A} = \alpha + \beta = 90^\circ$$





قضیه ۸: در مثلث قائم الزاویه، اگر یک زاویه 30° درجه باشد، آنگاه ضلع روبه رو به زاویه 30° درجه نصف وتر است.



پرهان: میان AM را رسم می کنیم: $AB = \frac{BC}{2}$ $\hat{C} = 30^\circ$ $\hat{A} = 90^\circ$

$$\hat{C} = 30^\circ \xrightarrow{MA=MC} \hat{A}_1 = 30^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = 90^\circ - \hat{A}_1 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\hat{B} = 90^\circ - \hat{C} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABM: \begin{cases} \hat{B} = 60^\circ \\ \hat{A}_2 = 60^\circ \end{cases} \rightarrow \hat{M} = 60^\circ \rightarrow \triangle ABM \text{ متساوی الاضلاع}$$

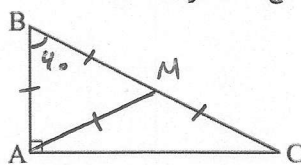
$$\rightarrow AB = BM = \frac{BC}{2}$$

نکته: در قضیه ی فوق ضلع مجاور زاویه ی 30° درجه $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است.

$$\frac{AB^2}{(\frac{BC}{2})^2} + AC^2 = BC^2 \rightarrow \frac{BC^2}{4} + AC^2 = BC^2 \rightarrow AC^2 = BC^2 - \frac{BC^2}{4} = \frac{3BC^2}{4}$$

$$\rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$$

عکس قضیه ۸: در مثلث قائم الزاویه، اگر یک ضلع نصف وتر باشد، آنگاه زاویه ی روبه رو به این ضلع 30° درجه است.



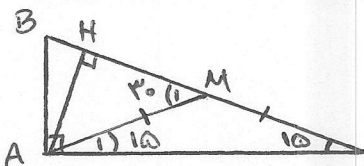
$$AB = \frac{BC}{2} \quad \hat{C} = 30^\circ$$

پرهان: میان AM را رسم می کنیم:

$$AB = AM = BM = \frac{BC}{2} \rightarrow \triangle ABM \text{ متساوی الاضلاع} \rightarrow \hat{B} = 60^\circ$$

$$\rightarrow \hat{C} = 30^\circ$$

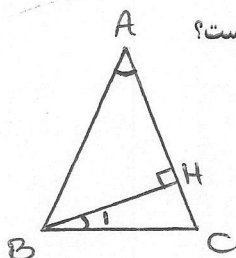
مثال: در مثلث قائم الزاویه ی ABC ($\hat{C} = 15^\circ, \hat{A} = 90^\circ$)، ارتفاع AH و میانه ی AM را رسم می کنیم. اگر $BC = 4$ باشد، طول HM را بیابید.



$$\hat{C} = 15^\circ \xrightarrow{MA=MC} \hat{A}_1 = 15^\circ$$

$$\triangle AMC \text{ زاویه خارجی } \hat{M}_1 = \hat{A}_1 + \hat{C} = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$$

$$\rightarrow \triangle AHM: \begin{cases} \hat{H} = 90^\circ \\ \hat{M}_1 = 30^\circ \end{cases} \rightarrow HM = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{AM}{\frac{BC}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{4}{2} = \sqrt{3}$$



تست: در مثلث متساوی الساقینی، ارتفاع وارد بر ساق، نصف ساق است. زاویه ی بین این ارتفاع و قاعده کدام است؟

$$\text{ف: } \begin{cases} AB = AC \\ BH = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} AB \end{cases} \quad \text{ع: } \hat{B}_1 = ?$$

$$15^\circ \quad (17)$$

$$30^\circ \quad (2)$$

$$\triangle ABH: \begin{cases} \hat{H} = 90^\circ \\ BH = \frac{AB}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{عکس قضیه ۸}} \hat{A} = 30^\circ \rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 75^\circ$$

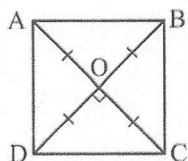
$$45^\circ \quad (3)$$

$$\rightarrow \triangle BCH: \begin{cases} \hat{H} = 90^\circ \\ \hat{C} = 75^\circ \end{cases} \rightarrow \hat{B}_1 = 15^\circ$$

$$60^\circ \quad (4)$$



۳- مربع

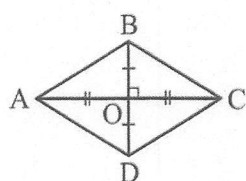


تعریف: مربع، مستطیلی است که طول و عرض برابر دارد. (یا مستطیلی است که قطرهایش

بر هم عمودند)

قضیه ۹: قطرهای مربع، نیمساز زوایای مربع می‌باشند و مربع را به چهار مثلث هم‌نهشت تقسیم می‌کنند.

۴- لوزی

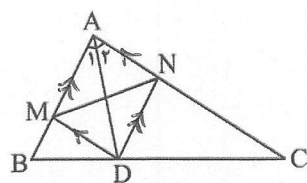


تعریف: لوزی، متوازی‌الاضلاع است که طول و عرض برابر دارد.

قضیه ۱۰: در لوزی قطرهای عمود منصف یکدیگرند و برعکس.

قضیه ۱۱: در لوزی قطرهای نیمساز زوایای لوزی می‌باشند و برعکس.

مثال: در مثلث ABC، از نقطه D محل تلاقی نیمساز داخلی زاویه A با ضلع BC خطوطی موازی دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم تا آن‌ها را در M و N قطع کند. AD و MN نسبت به هم چه وضعی دارند؟



$$\begin{cases} DM \parallel AN \\ DN \parallel AM \end{cases} \rightarrow \text{متوازی‌الاضلاع } AMDN$$

(۱) فقط عمود بر هم

(۲) فقط منصف هم

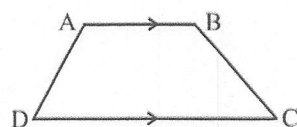
(۳) زاویه بین آن‌ها مکمل زاویه A
 $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \rightarrow \text{لوزی } AMDN \rightarrow AD \text{ و } MN \text{ عمود منصف هم}$

قطر نیمساز است

(۴) ✓ عمود منصف هم

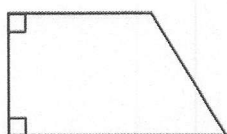
۵- دوزنقه

تعریف: دوزنقه، چهارضلعی است که فقط دو ضلع آن با هم موازی‌اند.



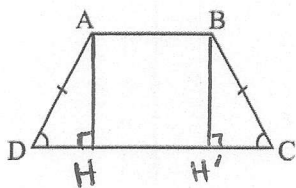
$$AB \parallel CD \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \\ \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \end{cases}$$

ضلع‌های غیر موازی AD و BC ساق‌های دوزنقه و AB و CD قاعده‌های دوزنقه نامیده می‌شوند.



نکته: هرگاه در یک دوزنقه یک ساق بر یکی از قاعده‌ها عمود باشد، مسلماً

بر دیگری نیز عمود است و در این صورت دوزنقه را قائم‌الزاویه می‌نامیم.



نکته: اگر $AD = BC$ باشد، دوزنقه، متساوی الساقین نامیده می شود.

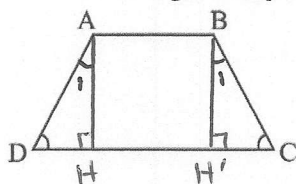
قضیه ۱۲: در هر دوزنقه ی متساوی الساقین، زاویه های مجاور به یک قاعده برابرند.

$$\text{ف: } AD = BC \quad \text{ح: } \hat{C} = \hat{D}$$

$$\begin{cases} AD = BC \\ AH = BH' \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر یک ضلع}} \triangle ADH \cong \triangle BCH' \xrightarrow{\text{اجزای تقبی}} \hat{C} = \hat{D}$$

خاصله دو خط موازی همواره برابر

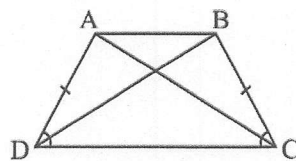
عکس قضیه ۱۲: اگر در یک دوزنقه، دو زاویه ی مجاور به یک قاعده برابر باشند، آنگاه دوزنقه متساوی الساقین است.



$$\begin{cases} \hat{C} = \hat{D} \\ AD = BC \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع زوایا ۱۸۰}} \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

$$\triangle ADH \cong \triangle BCH' \quad \text{و} \quad \triangle BCH' \quad \text{و} \quad \triangle ADH \quad \begin{cases} \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ \hat{C} = \hat{D} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \\ AH = BH' \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{زمن}} \triangle ADH \cong \triangle BCH' \xrightarrow{\text{اجزای تقبی}} AD = BC$$



قضیه ۱۳: در هر دوزنقه ی متساوی الساقین، اقطار با یکدیگر برابرند و برعکس.

$$\text{ف: } AD = BC \quad \text{ح: } AC = BD$$

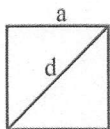
$$\begin{cases} AD = BC \\ \hat{D} = \hat{C} \\ DC = DC \end{cases} \xrightarrow{\text{ضمن}} \triangle ADC \cong \triangle BCD \xrightarrow{\text{اجزای تقبی}} AC = BD$$



* مساحت و کاربردهای آن

- یادآوری:

(- مربع)



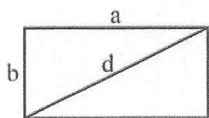
$$\begin{cases} S = a^2 \rightarrow \text{یک ضلع به توان ۲} \\ P = 4a \\ d = a\sqrt{2} \end{cases}$$

مثال: مساحت یک مربع با محیط آن برابر است. طول قطر مربع را بیابید.

$$S = P \rightarrow a^2 = 4a \rightarrow a = 4$$

$$\rightarrow d = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

۲- مستطیل



$$\begin{cases} S = ab \rightarrow \text{طول} \times \text{عرض} \\ P = 2(a + b) \\ d = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

تست: مستطیلی به طول ۴ و عرض b مفروض است. اگر نسبت قطر مستطیل به مساحت آن برابر $\frac{5}{12}$ باشد، b کدام است؟

$$\frac{d}{S} = \frac{\sqrt{4^2 + b^2}}{4b} = \frac{5}{12} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{16 + b^2}{b^2} = \frac{25}{9} \rightarrow 9 \times 16 + 9b^2 = 25b^2$$

$$\rightarrow 9 \times 16 = 25b^2 - 9b^2 = 16b^2 \rightarrow b = 3$$

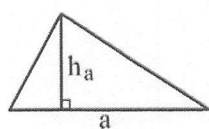
۲ (۱)

۳ (۲) ✓

۴ (۳)

۵ (۴)

۳- مثلث

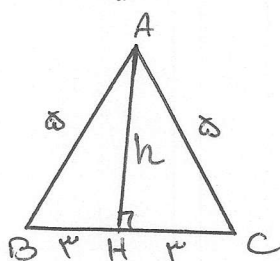


$$\begin{cases} S = \frac{a \times h_a}{2} \rightarrow \text{قاعده} \times \text{ارتفاع} \\ P = \text{مجموع طول سه ضلع} \end{cases}$$

مثال: در مثلث متساوی الساقین ABC، AB=AC=۵ و BC=۶ است. مساحت مثلث را بیابید.

$$\triangle ABH: 3^2 + h^2 = 5^2 \rightarrow h^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow h = 4$$

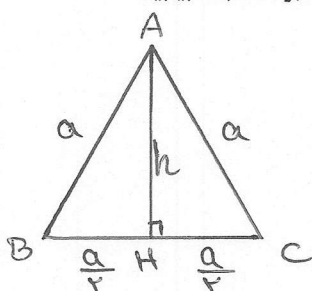
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$$



مثال: در مثلث متساوی الاضلاع ABC، اگر طول هر ضلع برابر a باشد، فرمولی برای ارتفاع و مساحت مثلث بر حسب a بیابید.

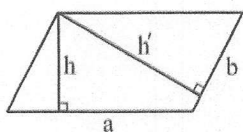
$$\triangle ABH: h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \rightarrow h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2 \rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$



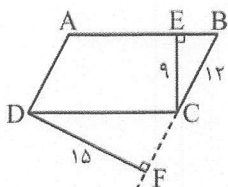
$$S = \frac{1}{2} h \times a = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a \times a \rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

۴- متوازی الاضلاع



$$\begin{cases} S = a \times h = b \times h' \rightarrow \text{ارتفاع} * \text{قاعده} \\ P = 2(a + b) \end{cases}$$

تست: در شکل مقابل، ABCD متوازی الاضلاع است. با توجه به اندازه ها، طول AB کدام است؟



$$S = AB \times \frac{CE}{a} = \frac{DF}{15} \times \frac{BC}{12} \rightarrow AB = \frac{15 \times 12}{9}$$

$$\rightarrow AB = 20$$

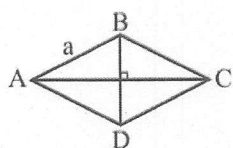
۱۵ (۱)

۱۸ (۲)

۲۰ (۳) ✓

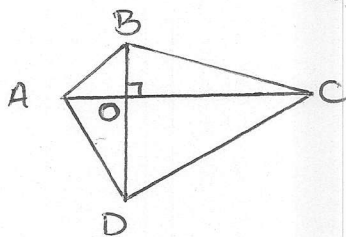
۲۱ (۴)

۵- لوزی



$$\begin{cases} S = \frac{AC \times BD}{2} \rightarrow \text{نصف حاصل ضرب دو قطر} \\ P = 4a \end{cases}$$

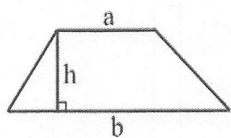
مثال: در چهارضلعی ABCD، دو قطر AC و BD بر هم عمودند. ثابت کنید: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD$



$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \times BO + \frac{1}{2} AC \times DO$$

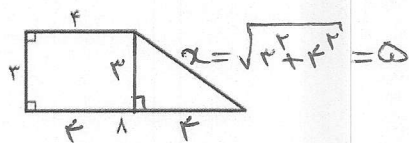
$$= \frac{1}{2} AC (BO + DO) \rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD$$

۶- ذوزنقه



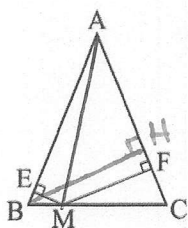
$$\begin{cases} S = \frac{(a+b) \times h}{2} \rightarrow \text{نصف مجموع دو قاعده} * \text{ارتفاع} \\ P = \text{مجموع طول چهار ضلع} \end{cases}$$

تست: مساحت شکل مقابل، چند برابر محیط آن است؟



$$\frac{S}{P} = \frac{\frac{1}{2}(4+1) \times 3}{3+3+5+1} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

 $\frac{10}{9}$ (۱) $\frac{9}{10}$ (۲) ✓ $\frac{23}{18}$ (۳) $\frac{18}{23}$ (۴)



مثال مهم: در مثلث متساوی الساقین ABC که $AB=AC$ است، از نقطه‌ی دلخواه M روی قاعده‌ی BC دو عمود

ME و MF را بر دو ساق رسم کرده‌ایم. نشان دهید: $ME+MF=BH$

پرهان: از M به A وصل می‌کنیم:

$$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{ACM}$$

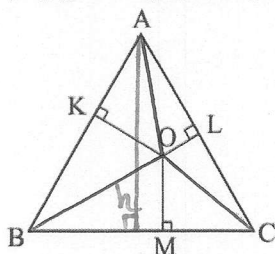
$$\rightarrow \frac{1}{2} BH \times AC = \frac{1}{2} ME \times \underbrace{AB}_{AC} + \frac{1}{2} MF \times AC$$

$$\rightarrow \cancel{\frac{1}{2}} BH \times AC = \cancel{\frac{1}{2}} AC (ME + MF) \rightarrow ME + MF = BH$$

نتیجه: در هر مثلث متساوی الساقین، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده از دو ساق برابر ارتفاع است.

مثال مهم: در مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع a، از نقطه‌ی دلخواه O درون مثلث سه عمود OK، OL و OM را بر سه ضلع رسم

می‌کنیم. نشان دهید: $OK+OL+OM=h$
پرهان: از O به A و B و C وصل می‌کنیم:



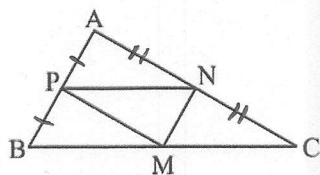
$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} a \times h = \frac{1}{2} a \times OK + \frac{1}{2} a \times OL + \frac{1}{2} a \times OM$$

$$\rightarrow h = OK + OL + OM$$

نتیجه: در هر مثلث متساوی الاضلاع، مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث از سه ضلع برابر ارتفاع است.

مثال: M و N و P وسط‌های سه ضلع مثلث ABC می‌باشند. نشان دهید: $\triangle APN \cong \triangle MNP \cong \triangle BMP \cong \triangle CMN$



$$\frac{AP}{PB} = \frac{AN}{NC} = 1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PN \parallel BC$$

$$PM \parallel AC \quad \text{به همین ترتیب}$$

$$\rightarrow \text{متوازی الاضلاع } PNCM$$

$$\xrightarrow[\text{متوازی الاضلاع}]{\text{قطر MN}} \triangle PMN \cong \triangle CMN$$

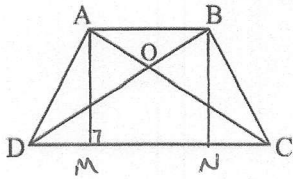
$$\left. \begin{array}{l} \triangle APMN \rightarrow \triangle PMN \cong \triangle APN \\ \triangle BMNP \rightarrow \triangle PMN \cong \triangle BMP \end{array} \right\} \rightarrow \triangle APN \cong \triangle MNP \cong \triangle BMP \cong \triangle CMN$$

نتیجه: اگر وسط‌های سه ضلع هر مثلث را به هم وصل کنیم، چهار مثلث هم‌بزرگ می‌شوند. و در نتیجه هم‌مساحت به وجود می‌آید.





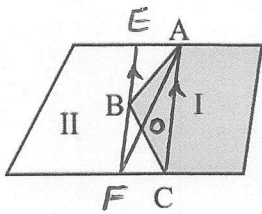
مثال (قضیه شبه پروانه): در دوزنقه‌ی ABCD، دو قطر AC و BD در O متقاطع‌اند. ثابت کنید: $S_{OAD} = S_{OBC}$



$$S_{ADC} = \frac{1}{2} DC \times AM \quad \xrightarrow{AM=BN} S_{ADC} = S_{BDC}$$

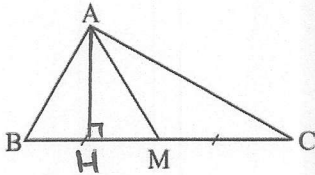
$$S_{BDC} = \frac{1}{2} DC \times BN$$

$$\rightarrow S_{AOD} + S_{DOC} = S_{BOC} + S_{DOC} \rightarrow S_{AOD} = S_{BOC}$$



کاربردی از مثال قبل: در شکل دو مزرعه I و II متعلق به دو کشاورز است. این دو کشاورز برای استفاده از ماشین‌های کشاورزی می‌خواهند مرز مشترک ABC بین زمین‌های خود را به یک پاره‌خط مستقیم تبدیل کنند به طوری که مساحت‌های زمین‌های آن‌ها تغییر نکند. چگونه باید این کار را انجام دهند؟

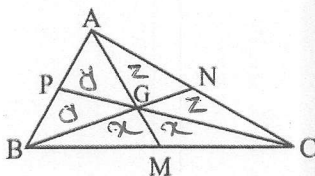
از A به C وصل کرده و از B به موازات AC رسم می‌کنیم تا دو مرز دیگر را در E و F قطع کند. حال اگر از A به F وصل کنیم، AF می‌تواند مرز جدید باشد (EC نیز می‌تواند باشد)، زیرا طبق قضیه شبه پروانه $S_{AOB} = S_{COF}$ است.



مثال مهم: الف) نشان دهید در هر مثلث، هر میانه، مثلث را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند.
 $BM = CM$ $\therefore S_{ABM} = S_{ACM}$

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} AH \times BM \quad \xrightarrow{BM=CM} S_{ABM} = S_{ACM}$$

$$S_{ACM} = \frac{1}{2} AH \times CM$$



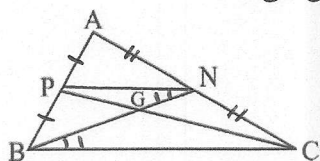
ب) با استفاده از قسمت الف) نشان دهید سه میانه‌ی مثلث، آن را به ۶ مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند.

$$\begin{aligned} \triangle GBC: & \quad GM \rightarrow S_{GBM} = S_{GCM} = x \\ \triangle GAB: & \quad GP \rightarrow S_{GAP} = S_{GBP} = y \\ \triangle GAC: & \quad GN \rightarrow S_{GAN} = S_{GCN} = z \end{aligned}$$

$$\triangle ABC: \begin{cases} \sim AM \rightarrow 2y + x = 2z + x \rightarrow y = z \\ \sim BN \rightarrow 2y + z = 2x + z \rightarrow y = x \end{cases} \Rightarrow x = y = z$$



قضیه مهم: سه میانه هر مثلث هم‌رس‌اند و نقطه‌ی هم‌رسی، هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کند.
پرهان: از P به N وصل می‌کنیم:



$$\frac{AP}{PB} = \frac{AN}{NC} = 1 \xrightarrow{\text{عکس‌السن}} PN \parallel BC \xrightarrow{\text{عکس}}$$

$$\frac{PN}{BC} = \left(\frac{AP}{AB}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{PN}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{N}_1 = \hat{B}_1 \\ \hat{G}_1 = \hat{G}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{مولای مورب}} \triangle PNG \sim \triangle GBC \xrightarrow{\text{نسبت اضلاع}}$$

$$\frac{GN}{GB} = \frac{GP}{GC} = \left(\frac{PN}{BC}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{عکس}} \frac{GB}{GN} = \frac{GC}{GP} = \frac{2}{1}$$

چون دو میانه‌ی BN و CP دلخواه بودند، پس این رابطه در مورد هر دو میانه‌ی دیگر نیز برقرار است، در نتیجه هر ۳ میانه‌ی مثلث هم‌رس‌اند.

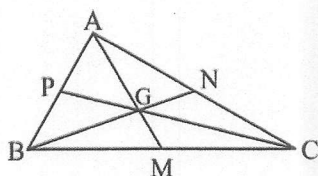
نتیجه: میانه‌های هر مثلث هم‌رس‌اند.

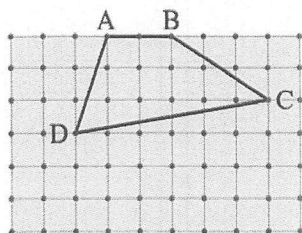
نکته ۱: محل هم‌رسی میانه‌های هر مثلث دلخواه، همواره داخل مثلث قرار دارد.

نکته ۲: محل هم‌رسی میانه‌های مثلث، مرکز ثقل مثلث نامیده می‌شود و معمولاً با حرف G نام‌گذاری می‌شود.

نکته ۳: مرکز ثقل مثلث، هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.

$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GP} = 2$$





* نقاط شبکه‌ای و مساحت

در شکل مقابل، نقاطی عمودی و افقی در کنار هم وجود دارند به طوری که فاصله‌ی هر دو نقطه‌ی متوالی روی یک خط عمودی (یا افقی) از هم برابر یک واحد است. به این نقاط، نقاط شبکه‌ای و به چندضلعی ABCD، یک چندضلعی شبکه‌ای می‌گوییم.

نقاط شبکه‌ای روی رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی را نقاط مرزی و نقاط شبکه‌ای درون چندضلعی‌ها را نقاط درونی شبکه‌ای می‌نامیم.

به طور مثال چهارضلعی ABCD دارای ۵ نقطه‌ی مرزی و ۹ نقطه‌ی درونی شبکه‌ای است.

فرمول پیک: اگر تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای را با b و تعداد نقاط درونی شبکه‌ای را با i نشان دهیم، مساحت چندضلعی

$$S = \frac{b}{2} - 1 + i$$

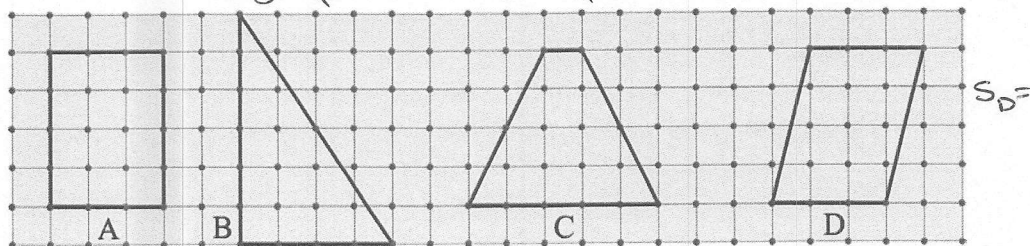
شبکه‌ای برابر است با:

به کمک فرمول پیک می‌توان مساحت شکل‌های نامنظم هندسی را به طور تقریبی محاسبه کرد.

مثال: در شکل‌های زیر، مساحت چندضلعی‌های داده شده را ابتدا به روش معمول محاسبه کنید. سپس با تعیین نقاط مرزی و درونی، جدول

زیر را تکمیل و درستی فرمول پیک را تحقیق کنید. $S_B = \frac{4 \times 4}{2} = 12$ $S_C = \frac{(1+5) \times 4}{2} = 12$

$$S_A = 3 \times 4 = 12$$



چندضلعی	A	B	C	D
تعداد نقاط مرزی b	۱۴	۱۲	۱۰	۸
تعداد نقاط درونی i	۶	۷	۸	۹
مساحت	$\frac{14}{2} - 1 + 6 = 12$	$\frac{12}{2} - 1 + 7 = 12$	$\frac{10}{2} - 1 + 8 = 12$	$\frac{8}{2} - 1 + 9 = 12$

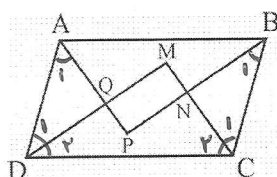
C خلاصه نویسی:

C سوالات تشریحی:

۱- در کدام n ضلعی تعداد قطرهای و ضلعها برابر است؟ (تمرین ۱ صفحه ۶۳)

$$\frac{n(n-3)}{2} = n \rightarrow \frac{n-3}{2} = 1 \rightarrow n-3=2 \rightarrow n=5$$

۲- ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای داخلی هر متوازی الاضلاع، یک مستطیل پدید می آید. (تمرین ۳ صفحه ۶۳)



$$\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \rightarrow \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \rightarrow \hat{Q} = 90^\circ$$

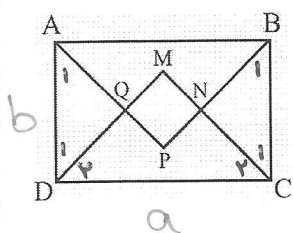
$$\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \rightarrow \hat{N} = 90^\circ$$

$$\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ \rightarrow \hat{C}_2 + \hat{D}_2 = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \rightarrow \hat{M} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{P} = 90^\circ$$

← MNPQ مستطیل است.

۳- الف) ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای داخلی هر مربع پدید می آید. (تمرین ۳ صفحه ۶۳)
هـ) سؤالی قبل ۹۰ درجه بودن چهار زاویه ی MNPQ را به راحتی می توان ثابت کرد:



$$\hat{A}_1 = \hat{D}_1 = 45^\circ \rightarrow \hat{Q} = 90^\circ$$

$$\hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 45^\circ \rightarrow \hat{N} = 90^\circ$$

$$\hat{C}_2 = \hat{D}_2 = 45^\circ \rightarrow \hat{M} = 90^\circ \Rightarrow \hat{P} = 90^\circ \rightarrow \text{تایید می شود MNPQ مستطیل است}$$

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 45^\circ \\ AD = BC \\ \hat{D}_1 = \hat{C}_1 = 45^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{از شرط ۱}} \triangle AQD \cong \triangle BNC \xrightarrow{\text{اجزای متضاد}} QD = NC \quad (1)$$

$$\hat{C}_2 = \hat{D}_2 = 45^\circ \rightarrow \triangle DMC: MD = MC \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \rightarrow \underbrace{MD - QD}_{MQ} = \underbrace{MC - NC}_{MN} \rightarrow MQ = MN \rightarrow \text{مربع MNPQ است}$$

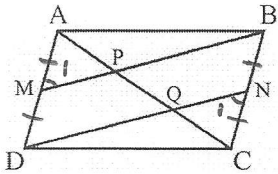
ب) اگر طول و عرض مستطیل برابر a و b باشند، اندازه ی ضلع مربع را بر حسب a و b بیابید. (تمرین ۴ صفحه ۶۴)

$$\triangle DMC: MD^2 + MC^2 = a^2 \rightarrow 2MD^2 = a^2 \rightarrow MD^2 = \frac{a^2}{2} \rightarrow MD = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\triangle AQD: AQ^2 + QD^2 = b^2 \rightarrow 2QD^2 = b^2 \rightarrow QD^2 = \frac{b^2}{2} \rightarrow QD = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$MD - QD = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{2}} \rightarrow MD = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$$

۴- در متوازی الاضلاع ABCD، M و N به ترتیب وسطهای اضلاع AD و BC می باشند، (تمرین ۷ صفحه ۶۴)



الف) ثابت کنید MB موازی DN است.

$$AD = BC \rightarrow \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2} \rightarrow AM = CN$$

$$\begin{cases} AB = CD \\ \angle A = \angle C \\ AM = CN \end{cases} \xrightarrow{\text{ض. زغنی}} \triangle ABM \cong \triangle CDN \xrightarrow{\text{ا.ج.ا. ت.ق.ی.د.}} \hat{M}_1 = \hat{N}_1$$

$$AD \parallel BC \text{ و } DN \text{ وسط } BC \rightarrow \hat{D}_1 = \hat{N}_1 \rightarrow \hat{M}_1 = \hat{D}_1$$

MB \parallel DN

ب) ثابت کنید: AP = PQ = QC

$$\triangle ADQ : MP \parallel DQ \xrightarrow{\text{ض. زغنی}} \frac{AM}{MD} = \frac{AP}{PQ} \rightarrow AP = PQ$$

$$\triangle CBP : QN \parallel PB \xrightarrow{\text{ض. زغنی}} \frac{CN}{NB} = \frac{CQ}{QP} \rightarrow CQ = QP$$

AP = PQ = QC

۳ سوالات تستی:

۱- در کدام چندضلعی، تعداد قطرهای سه واحد بیشتر از تعداد ضلعها است؟

- (۱) ۵ ضلعی
(۲) ۶ ضلعی ✓
(۳) ۸ ضلعی
(۴) ۱۰ ضلعی

۲- شکل حاصل از به هم وصل کردن اوساط اضلاع یک، یک است.

- (۱) دوزنقه - لوزی
(۲) لوزی - مستطیل ✓
(۳) مستطیل - مربع
(۴) مربع - لوزی

۳- شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه های داخلی، یک است.

- (۱) متوازی الاضلاع - مربع
(۲) لوزی - مربع
(۳) مربع - مستطیل
(۴) مستطیل - مربع ✓

۴- از برخورد نیمسازهای زاویه های داخلی مستطیلی به ابعاد ۱۲ و ۱۶، یک مربع پدید می آید که مساحتش برابر است با:

$$x = \frac{a-b}{\sqrt{2}} = \frac{16-12}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$S = x^2 = \frac{16}{2} = 8$$

(۱) $2\sqrt{2}$
(۲) ۴
(۳) ۸ ✓
(۴) $8\sqrt{2}$

۵- در یک دوزنقه ی متساوی الساقین به قاعده های ۴ و ۱۲، طول ارتفاع وارد بر قاعده ۴ است. اوساط اضلاع را به هم وصل می کنیم، محیط چهارضلعی حاصل چقدر است؟

- (۱) $4\sqrt{5}$
(۲) $8\sqrt{5}$ ✓
(۳) $4\sqrt{10}$

خلاصه نویسی:

سؤالات تشریحی:

۱- در مثلث قائم الزاویه، اگر یک زاویه ۱۵ درجه باشد، آنگاه ثابت کنید ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ وتر است. (تمرین ۶ صفحه ۶۴)

برهان: میان خط وارد بر وتر AM را رسم می‌کنیم:

$C: AH = \frac{1}{4} BC$

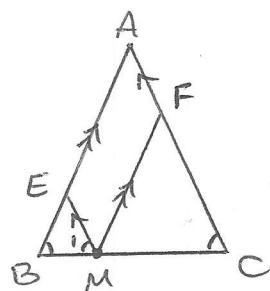
$\hat{C} = 15^\circ \xrightarrow{MA=MC} \hat{A}_1 = \hat{C} = 15^\circ$

ΔAMC زاویه خارجی $\hat{M} = \hat{A}_1 + \hat{C} = 15 + 15 = 30^\circ$

$\Delta AHM: \begin{cases} \hat{H} = 90^\circ \\ \hat{M} = 30^\circ \end{cases} \rightarrow AH = \frac{1}{2} AM \xrightarrow{AM = \frac{1}{2} BC} AH = \frac{1}{4} BC$

۲- از نقطه‌ی دلخواه M روی قاعده‌ی مثلث متساوی الساقین ABC ($AB=AC$)، دو خط به موازات دو ساق رسم می‌کنیم تا

آنها را در E و F قطع کند. ثابت کنید: $ME+MF=AB=AC$



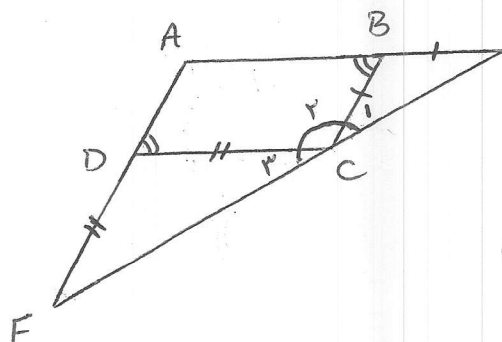
$\begin{cases} AF \parallel ME \\ AE \parallel MF \end{cases} \rightarrow \text{موازی الاضلاع} AEMF \rightarrow MF = AE \quad (1)$

$AB=AC \rightarrow \hat{B} = \hat{C} \rightarrow \hat{B} = \hat{M}_1 \rightarrow ME = EB \quad (2)$

$EM \parallel AC \text{ و } BC \text{ قاطع} \rightarrow \hat{M}_1 = \hat{C}$

$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow ME + MF = \underbrace{AE + EB}_{AB}$

۳- در متوازی الاضلاع $ABCD$ ، روی امتداد AB به اندازه‌ی $BE=BC$ و روی امتداد AD به اندازه‌ی $DF=DC$ جدا می‌کنیم. ثابت کنید نقاط E, C و F بر یک امتدادند.



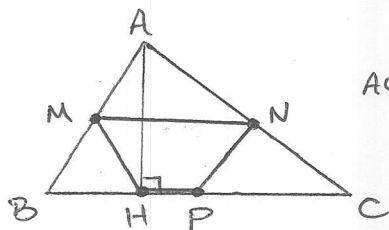
$\Delta BCE: BC=BE \rightarrow \hat{C}_1 = \hat{E} \rightarrow \text{زاویه خارجی } \hat{B} = 2\hat{C}_1 \rightarrow \hat{C}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$

$\Delta CDE: DF=DC \rightarrow \hat{C}_2 = \hat{F} \rightarrow \text{زاویه خارجی } \hat{D} = 2\hat{C}_2 \rightarrow \hat{C}_2 = \frac{\hat{D}}{2}$

$\hat{C} = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \hat{C}_3 = \frac{\hat{B}}{2} + \hat{C}_3 + \frac{\hat{D}}{2} = \hat{D} + \hat{C}_3 = 180^\circ$

$B=D$ و F و C و E بر یک امتدادند.

۴- در یک مثلث غیرمستوی، وسطهای سه ضلع و پای یک ارتفاع را به هم وصل کرده ایم. ثابت کنید چهارضلعی حاصل دوزنقه‌ی متساوی الساقین است.



AC, AB وسطها $M, N \rightarrow MN \parallel HP \rightarrow$

میان خط دوزنقه

$NP \parallel \frac{1}{2} AB$ میان خط

$\Delta ABH: HM = \frac{1}{2} AB$ میان وارد پروتر

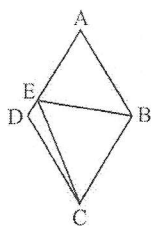
$NP = HM \rightarrow$ دوزنقه متساوی الساقین

۳- سوالات تستی:

۱- کدام یک از تعاریف زیر، تعریف لوزی است؟

۱✓ (۱) متوازی الاضلاعی که اضلاعش با هم برابرند. (۲) چهارضلعی که اقطارش بر هم عمودند.

(۳) متوازی الاضلاعی که اقطارش منصف یکدیگرند. (۴) مربعی که اقطارش بر هم عمودند.



۲- در لوزی ABCD شکل مقابل، $AB = BE$ می باشد. اگر $\hat{BEC} = 55^\circ$ باشد، زاویه ی DEC چند درجه است؟

۵۵ (۲✓) ۳۵ (۱)

۶۰ (۴) ۴۵ (۳)

۳- در یک دوزنقه‌ی متساوی الساقین، قاعده‌ی کوچک برابر هر ساق و قاعده‌ی بزرگ دو برابر قاعده‌ی کوچک است. اندازه‌ی زاویه‌ی حاده‌ی دوزنقه چقدر است؟

۶۰° (۲✓) ۷۵° (۱)

۷۲° (۴) ۴۵° (۳)

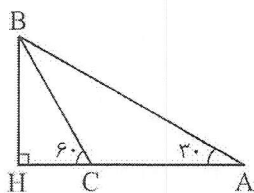
۴- در شکل مقابل، اگر طول AC برابر ۵۰ متر باشد، طول AH چند متر است؟

۷۵ (۱✓)

۸۰ (۲)

۸۵ (۳)

۹۰ (۴)



۵- در مثلث قائم الزاویه ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، ارتفاع AH را رسم کرده و از H به نقاط E و F اوساط اضلاع AB و AC وصل می کنیم. زاویه ی EHF برابر است با:

۷۵° (۱)

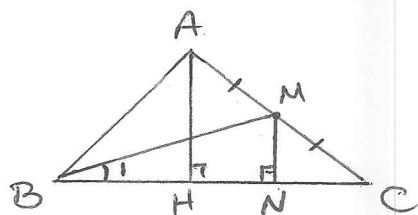
۸۰° (۲)

۹۰° (۳✓)

۱۰۰° (۴)

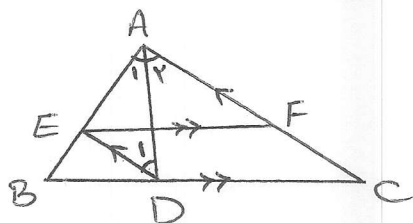
۳ سوالات تشریحی:

- ۱- در مثلث ABC، ارتفاع AH با میانه‌ی BM برابر است. اندازه‌ی زاویه‌ی CBM را بیابید. (راهنمایی: از M بر BC عمود کنید) $\hat{A}H = \hat{B}M$ ؟ $\hat{C} : \hat{B}_1 = ?$



$$\begin{aligned} MN \perp BC, AH \perp BC &\Rightarrow MN \parallel AH \xrightarrow{\text{میان خط}} \frac{MN}{AH} = \left(\frac{CM}{CA}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}AH \\ AH = BM &\Rightarrow MN = \frac{1}{2}BM \rightarrow \triangle BMN : \hat{B}_1 = 30^\circ \end{aligned}$$

- ۲- نیمساز AD از مثلث ABC را رسم کرده و از نقطه‌ی D خطی به موازات AC رسم می‌کنیم تا AB را در E قطع کند. سپس از E خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا AC را در F قطع کند. ثابت کنید: $AE = FC$



$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2, \begin{cases} DE \parallel AC \\ EF \parallel BC \end{cases}$$

$$EF \parallel DC \xrightarrow{\text{موازی الاضلاع}} EFCD \rightarrow FC = ED \quad (1)$$

$$ED \parallel AF, AD \text{ مشترک} \rightarrow \hat{A}_2 = \hat{D}_1, \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_1 \rightarrow AE = ED \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow AE = FC$$

۳ سوالات تستی:

- ۱- مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای رسم شده از هر رأس یک n ضلعی، کدام است؟

(۴) $n-3$

(۳) n

(۲) $n-1$ ✓

(۱) $n-2$

- ۲- اگر در یک n ضلعی، نسبت تعداد اقطار به تعداد اضلاع ۱۰ باشد، تعداد رئوس این چندضلعی برابر است با:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 10 \rightarrow \frac{n-3}{2} = 10 \rightarrow n = 23$$

(۲) ۲۱

(۱) ۲۰

(۴) ۲۳ ✓

(۳) ۲۲

- ۳- قطرهای کدام چهارضلعی منصف یکدیگر نمی‌باشند؟

(۴) ✓ دوزنقه

(۳) مربع

(۲) مستطیل

(۱) متوازی‌الاضلاع

- ۴- کدام یک از تعاریف زیر، تعریف مربع نیست؟

(۲) لوزی که قطرهايش برابرند.

(۱) مستطیلی که دو ضلع مجاورش برابرند.

۵- در چهارضلعی ABCD داریم: $AB \parallel CD$ و $AD = BC = CD$. اگر زاویه $\hat{BAC} = 30^\circ$ باشد، اندازهی زاویهی \hat{CAD} چقدر است؟

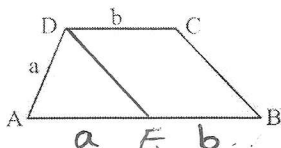
(۱) 20°

(۲) 30° ✓

(۳) 40°

(۴) 15°

۶- در ذوزنقهی ABCD شکل مقابل داریم: $\hat{D} = 2\hat{B}$ ، با توجه به اندازه‌ها، طول AB کدام است؟



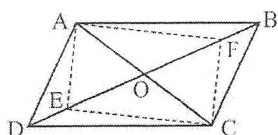
(۱) $a + b$ ✓

(۲) $2(a + b)$

(۳) $b - a$

(۴) $2(b - a)$

۷- در متوازی‌الاضلاع ABCD شکل مقابل، نقاط E و F را روی قطر BD طوری انتخاب می‌کنیم که $OE = OF = AO$ باشد.



نوع چهارضلعی AECF کدام است؟

(۱) متوازی‌الاضلاع

(۲) ذوزنقه

(۳) مربع

(۴) مستطیل ✓

۸- از برخورد نیمسازهای داخلی شکل A، شکل B و از برخورد نیمسازهای داخلی شکل B، یک مربع ایجاد شده است. شکل A کدام بوده است؟

(۱) مستطیل

(۲) مربع

(۳) لوزی

(۴) متوازی‌الاضلاع ✓

۹- اگر a و b اضلاع یک مستطیل باشند، آنگاه مساحت چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی این مستطیل کدام است؟

(۱) $\frac{a^2 + b^2}{2}$

(۲) $\frac{a^2 - b^2}{2}$

(۳) $\frac{(a - b)^2}{2}$ ✓

(۴) $\frac{(a + b)^2}{2}$

۱۰- اگر اقطار یک چهارضلعی بر هم عمود باشند، آنگاه اوساط اضلاع آن رئوس کدام چهارضلعی است؟

(۱) متوازی‌الاضلاع

(۲) مستطیل ✓

(۳) لوزی

(۴) مربع

۱۱- اگر اقطار یک چهارضلعی با هم مساوی باشند، آنگاه اوساط اضلاع آن رئوس کدام چهارضلعی است؟

(۱) متوازی‌الاضلاع

(۲) مستطیل

۱۲- اگر اوساط اضلاع یک مستطیل به طول ۴ و عرض ۳ را به هم وصل کنیم، محیط شکل حاصل چقدر است؟

۵ (۱) ☒ ۱۰ (۲)

۱۵ (۳) ۲۰ (۴)

۱۳- در تست قبل، مساحت شکل حاصل چقدر است؟

۱۲ (۱) ۸ (۲)

۶ (۳) ☒ ۱۶ (۴)

۱۴- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر، زاویه‌ی قائمه را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند. اگر اندازه‌ی

ارتفاع وارد بر وتر $\sqrt{3}$ باشد، اندازه‌ی وتر کدام است؟

۴ (۱) $4\sqrt{3}$

۴ (۲) ☒

۳ (۳)

۳ (۴) $3\sqrt{3}$

۱۵- در یک مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر، دو برابر ارتفاع وارد بر وتر است. تفاضل دو زاویه‌ی حاده‌ی مثلث کدام است؟

۱۵° (۱)

۷۵° (۲)

۳۰° (۳)

۶۰° (۴) ☒

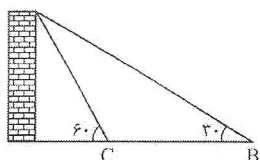
۱۶- در شکل مقابل، $\hat{B} = 30^\circ$ ، $\hat{C} = 60^\circ$ و $BC = 112$ متر است. ارتفاع دیوار چند متر است؟

۵۶ (۱) ☒ $56\sqrt{3}$

۵۶ (۲) $56\sqrt{2}$

۶۰ (۳) $60\sqrt{3}$

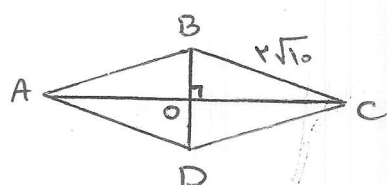
۶۰ (۴) $60\sqrt{2}$



ح خلاصه نویسی:

ح سوالات تشریحی:

۱- در یک لوزی اندازه‌ی هر ضلع $2\sqrt{10}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{1}{3}$ است. مساحت لوزی را بیابید. (تمرین ۱ صفحه ۷۲)



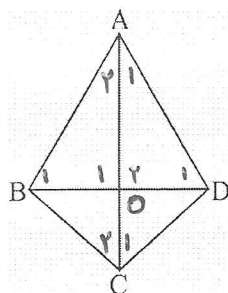
$$\frac{BD}{AC} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{BO}{OC} = \frac{1}{3}$$

$$\Delta BOC: BO^2 + OC^2 = (2\sqrt{10})^2 \rightarrow 10BO^2 = 40 \rightarrow BO = 2 \rightarrow BD = 4$$

$$\rightarrow OC = 3BO = 6 \rightarrow AC = 12$$

$$\rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times 4 \times 12 = 24$$

۲- در چهارضلعی ABCD شکل مقابل، $AB=AD$ و $BC=CD$ است. آیا قطرهای این چهارضلعی بر هم عمودند؟ چرا؟
 نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمساز \hat{A} و \hat{C} است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است. (تمرین ۲ صفحه ۷۲)



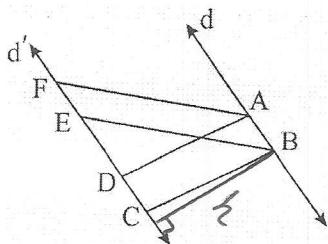
$$\begin{cases} AB=AD \\ BC=DC \\ AC=AC \end{cases} \xrightarrow{(ض/ض/ض)} \Delta ABC \cong \Delta ADC \rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \end{cases} \rightarrow \hat{C} \text{ و } \hat{A} \text{ نیمساز } AC \text{ است}$$

$$\begin{cases} AB=AD \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AO=AO \end{cases} \xrightarrow{(ض/ض/ض)} \Delta AOB \cong \Delta AOD \rightarrow \begin{cases} OB=OD \text{ (1)} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow{\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 90^\circ \text{ (5)} \end{cases}$$

$$(1) \text{ و } (5) \Rightarrow BD \text{ عمودمنصف } AC$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$$

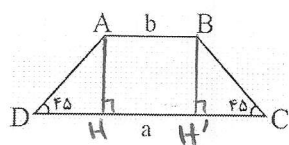
۳- در شکل دو خط d و d' موازی اند و $ABCD$ و $ABEF$ هر دو متوازی الاضلاع اند. اگر مساحت یکی از این متوازی الاضلاعها برابر S باشد، مساحت دیگری بر حسب S کدام است. (تمرین ۳ صفحه ۷۲)



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \times h$$

$$S_{ABEF} = \frac{1}{2} AB \times h \rightarrow S_{ABCD} = S_{ABEF} = S$$

۴- در دوزنقه‌ی شکل مقابل، اندازه‌های دو قاعده a و b و اندازه‌های دو زاویه‌ی مجاور به یک قاعده 45° است. مساحت دوزنقه را بر حسب a و b محاسبه کنید. (تمرین ۴ صفحه ۷۲)

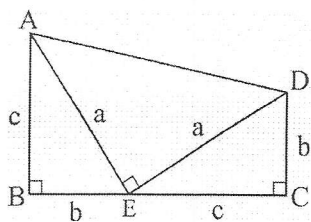


مشکلت های ADH و BCH' قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین اند:

$$AH = BH' = DH = CH' = \frac{a-b}{2}$$

$$S = \frac{(CD + AB) \times AH}{2} = \frac{(a+b) \left(\frac{a-b}{2} \right)}{2} = \frac{1}{4} (a^2 - b^2)$$

۵- مساحت دوزنقه‌ی مقابل را به دو طریق به دست آورید. از مساوی قرار دادن آن‌ها چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟



$$①: S = \frac{(AB + CD) \times BC}{2} = \frac{(b+c) \times (b+c)}{2} = \frac{(b+c)^2}{2}$$

$$②: S = S_{ABE} + S_{CDE} + S_{ADE} = \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2}$$

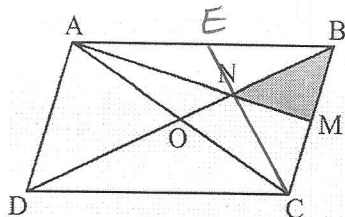
$$\rightarrow ① = ② \rightarrow \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{2bc + a^2}{2} \rightarrow b^2 + c^2 + 2bc = 2bc + a^2$$

$$\rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

اثبات قضیه فیثاغورس

سؤالات تشریحی:

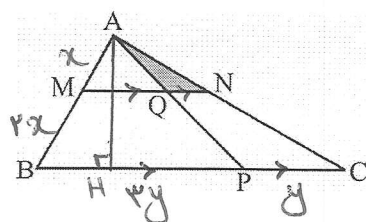
۱- در متوازی الاضلاع ABCD، نقطه‌ی M وسط ضلع BC است و پاره‌خط AM، قطر BD را در N قطع کرده است. نشان دهید: $S_{BMN} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$ (تمرین ۶ صفحه ۷۲)



دهید: $S_{BMN} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$ (تمرین ۶ صفحه ۷۲)
 از آنجایی که N وسط BD است و AM پاره‌خط است، E نقطه‌ی وسط AB است.
 هم‌سای میانه‌ها است، پس: $\frac{1}{2} S_{ABCD}$

$$S_{BMN} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$$

۲- در مثلث ABC، خط MN موازی ضلع BC و $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$ است. همچنین $\frac{PC}{PB} = \frac{1}{3}$ است. S_{MQPB} و S_{AQN} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟ (تمرین ۷ صفحه ۷۳)

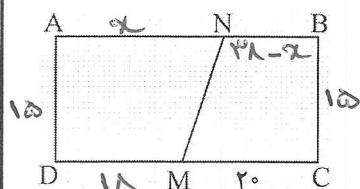


از مساحت مثلث ABC است؟ (تمرین ۷ صفحه ۷۳)
 $\hat{N} = \hat{C}$ و $\hat{A} = \hat{A}$ $\rightarrow \Delta AQN \sim \Delta APC$ $\rightarrow k = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$
 $\rightarrow \frac{S_{AQN}}{S_{APC}} = k^2 = \frac{1}{9} \rightarrow S_{AQN} = \frac{1}{9} S_{APC}$
 $\frac{S_{APC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AH \times PC}{\frac{1}{2} AH \times BC} = \frac{1}{3} \rightarrow S_{APC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \rightarrow S_{AQN} = \frac{1}{34} S_{ABC}$
 $S_{AQN} = \frac{1}{9} (\frac{1}{3} S_{ABC})$

$$S_{MQPB} = S_{ABC} - S_{AMQ} - S_{APC} = S_{ABC} - S_{AMN} + S_{AQN} - S_{APC}$$

$$= S - \frac{1}{9} S + \frac{1}{34} S - \frac{1}{3} S = \frac{2}{3} S$$

۳- زمین مستطیل شکلی به ابعاد ۳۸ و ۱۵ متر که دو نفر به طور مساوی در آن شریک اند، مفروض است. این زمین فقط از نقطه‌ی M که $MC = 20$ است به یک کوچه راه دارد. مرز MN را چگونه رسم کنیم تا زمین به دو قطعه‌ی با مساحت‌های مساوی بین آن دو تقسیم شود. (تمرین ۸ صفحه ۷۳)

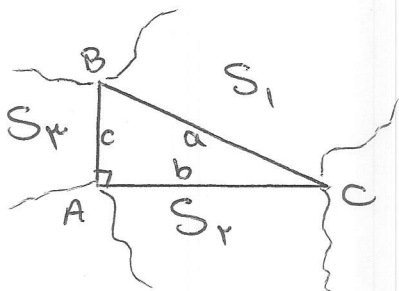


$$S_{ANMD} = S_{NBCM}$$

$$\frac{1}{2} (18 + x) \times 15 = \frac{1}{2} x (38 - x + 20) \times 15 \rightarrow 18 + x = 58 - x$$

$$\rightarrow 2x = 40 \rightarrow x = 20$$

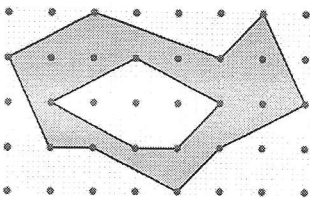
۴- سه چندضلعی متشابه روی سه ضلع یک مثلث قائم الزاویه می‌سازیم. ثابت کنید مساحت چندضلعی روی وتر برابر مجموع مساحت‌های ساخته شده روی ضلع‌های زاویه قائمه است. (تمرین ۹ صفحه ۷۳)



رابطه فیثاغورس: $a^2 = b^2 + c^2$
نسبت مساحت‌ها دو چندضلعی متشابه برابر k^2 (مقدور نسبت متشابه) است:

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{S_1} &= \frac{b^2}{a^2} & \frac{S_3}{S_1} &= \frac{c^2}{a^2} \\ \frac{S_2}{S_1} + \frac{S_3}{S_1} &= \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \xrightarrow{+} \frac{S_2 + S_3}{S_1} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \\ & \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} \frac{S_2 + S_3}{S_1} = \frac{a^2}{a^2} = 1 \\ & \xrightarrow{} S_2 + S_3 = S_1 \end{aligned}$$

۵- با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای، مساحت قسمت سایه‌زده را محاسبه کنید. (تمرین ۱۰ صفحه ۷۳)



$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{b_1}{r} - 1 + l_1 = \frac{9}{2} - 1 + 13 = \frac{33}{2} \\ S_2 &= \frac{b_2}{r} - 1 + l_2 = \frac{5}{2} - 1 + 3 = \frac{9}{2} \\ S_{\text{هاشور}} &= S_1 - S_2 = \frac{33}{2} - \frac{9}{2} = 12 \end{aligned}$$